Calcul matriceal

DEFINIȚIA NOȚIUNII DE MATRICE. Se numeşte *matrice* un tabel de elemente, cu *m linii* şi *n coloane*, în care poziția fiecărui element este unic determinată printr-o combinație de indici reprezentând linia, respectiv coloana pe care se găseşte elementul.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & a_{ij} & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad \begin{matrix} i = \text{indicator de linie} \\ j = \text{indicator de coloana} \end{matrix}$$

OPERAȚII CU MATRICI

ADUNAREA MATRICILOR. Adunarea matricilor se realizează element cu element. Condiție: dimensiunile matricilor care se operează trebuie să fie egale.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & a_{ij} & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & b_{ij} & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}, A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(R).$$

$$C=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & a_{ij}+b_{ij} & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times n}(R)$$

ÎNMULȚIREA CU UN SCALAR. Înmulțirea matricilor cu un scalar se realizează înmulțind fiecare element al matricii cu scalarul considerat.

$$\lambda \in R, A \in \mathcal{M}_{m\times n}(R) \Rightarrow \lambda \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda\cdot a_{11} & \lambda\cdot a_{12} & \dots & \lambda\cdot a_{1n} \\ \lambda\cdot a_{21} & \lambda\cdot a_{22} & \dots & \lambda\cdot a_{2n} \\ \dots & \dots & \lambda\cdot a_{ij} & \dots \\ \lambda\cdot a_{m1} & \lambda\cdot a_{m2} & \dots & \lambda\cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

ÎNMULȚIREA MATRICILOR. Înmulțirea matricilor se realiează linii prin coloane. Nu este comutativă. Condiție: Numărul de coloane al primei matrici = numărul de linii al celei de a doua matrici.

$$\left.\begin{array}{l} A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & a_{ij} & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times \mathbf{n}}(R) \\ B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & b_{ij} & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{\mathbf{n}\times p}(R) \end{array}\right\} \Rightarrow C = A\cdot B \in \mathcal{M}_{m\times p}(R)$$

c_{ij}=(linia "i" a matrici A)·(coloana "j" a matricii B)

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{i\mathbf{k}}\cdot b_{\mathbf{k}j},\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,p}$$

TRANSPUSA UNEI MATRICI. Fie $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & a_{ij} & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times n}(R)$. Prin

transpusa matricii A se înțelege matricea A^t definită prin

$$A^t=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & a_{ji} & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times m}(R) \quad \Bigg| \quad \begin{array}{l} \text{linia } i \to \text{coloana } i \\ \text{coloana } j \to \text{linia } j \end{array}$$

MATRICI CU FORMĂ SPECIALĂ

MATRICI PĂTRATICE: Matrici cu număr egal de linii şi coloane, $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(R)$

MATRICI (PĂTRATICE) TRIANGULARE, Exemplu:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \\ -2 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

triangulara superioara — triangulara inferioara

MATRICI (PĂTRATICE) DIAGONALE, Exemplu: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

MATRICEA IDENTICĂ DE DIMENSIUNE “n”

$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$; element neutru față de înmulțirea matricilor pătratice de dimensiune n.

Observație. Fie M={mulțimea matricilor pătratice de dimensiune n}.

(M, +, ·) inel necomutativ.

Temă pentru laborator. Verificați comutativitatea înmulțirii pentru 2 matrici pătratice de ordin = 5 utilizând functii matematice Excel.

MATRICI SIMETRICE

$A \in \mathcal{M}_{n\times n}(R)$ *simetrică* $\Leftrightarrow A^t = A$; Exemplu: $A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & 5 \\ 8 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

$A \in \mathcal{M}_{n\times n}(R)$ *antisimetrică* $\Leftrightarrow A^t = -A$; Exemplu: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -8 \\ -1 & 0 & 5 \\ 8 & -5 & 0 \end{pmatrix}$

diagonala neaparat nula